6.1 Comprendre les équations linéaires

En algèbre, le signe égal est le signe de l'équilibre. Il indique que les expressions de chaque côté du signe égal représentent la même valeur mumérique.

Est-ce que ces égalitiés sont vraies, fausses, ou ni l'un ni l'autre?

a) $4+3=7$ vraie

b) $7-3=5$ fausse

c) $3\times 4=12$ vraie

d) $x+2=7$ ni l'un ni l'autre, car x est inconnu.

Le remplacement de la variable dans $x+2=7$ par une constante qui équilibre l'égalité fait de cette constante une solution de l'équation. Dans cette équation, $x=5$ est la solution, car $5+2=7$. Les deux côtés du signe égal représentent la même valeur.

Il faut maintenant définir des principes qui permettront d'isoler la variable x d'un côte du signe égal.

> **Le principe de l'addition**
>
> Pour tous nombres réels a, b et c : $a=b$ signifie que $a+c=b+c$.

Exemple 1 Résoudre l'equation $x+2=5$ selon le principe de l'addition.

► *Solution*:

$$\begin{aligned} x+2&=5 \\ x+2+(-2)&=5+(-2) \\ x+0&=5-2 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Vérifier la solution : $x+2=5 \rightarrow 3+2=5 \rightarrow 5=5$ ce qui est vrai.

La solution de $x+2=5$ est donc $x=3$.

À noter : *Si x se retrouve du "mauvais" côté, le côté droit du signe égal, comme dans $-3=x$, is est possible de récrire $x=-3$.*

Si on finit par avoir dans la dernière étape $-x=7$, il faut multiplier (ou diviser) chaque côté du signe égal par -1, donc $x=-7$.

Exemple 2 Résoudre l'équation $2x - 3 = x + 5$ selon le principe de l'addition.

► *Solution*:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= x + 5 \\ 2x - 3 + (3) &= x + 5 + (3) \\ 2x &= x + 8 \\ 2x + (-x) &= x + (-x) + 8 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Vérifier : $2x - 3 = x + 5 \rightarrow 2(8) - 3 = 8 + 5 \rightarrow 16 - 3 = 13 \rightarrow 13 = 13$ ce qui est vrai.

La solution de $2x - 3 = x + 5$ est donc $x = 8$.

Le principe de la multiplication

Pour tous nombres réels a, b et c : $a = b$ signifie que $a \times c = b \times c$.

Les fractions inverses

Deux fractions sont dites **inverses** si le résultat de leur produit est égal à un.
La fraction inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$, pourvu que a et b soient non nuls.

Quand le principe de la multiplication est utilisé, il faut multiplier les deux côtés de l'équation par le même nombre.

Exemple 3 Résoudre l'équation $3x = 15$ selon le principe de la multiplication.

► *Solution*: Méthode 1 :

$$\begin{aligned} 3x &= 15 \\ 3x \times \frac{1}{3} &= 15 \times \frac{1}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vérifier : $3 \times 5 = 15 \rightarrow 15 = 15$ ce qui est vrai.

La solution de $3x = 15$ est donc $x = 5$.

Méthode 2 : $3x = 15$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

Vérifier : $3 \times 5 = 15 \rightarrow 15 = 15$ ce qui est vrai.

La solution de $3x = 15$ est donc $x = 5$.

À noter : $(\div 3)$ *est pareil à* $\left(\times \frac{1}{3}\right)$

Exemple 4 Résoudre l'équation $-\frac{2}{3}x = 6$.

► *Solution*:

$$-\frac{2}{3}x = 6$$

$$\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = (6)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x = -9$$

Vérifier : $-\frac{2}{3} \times (-9) = 6 \rightarrow 6 = 6$ ce qui est vrai.

La solution de $-\frac{2}{3}x = 6$ est donc $x = -9$.

À noter : $\left(\div -\frac{2}{3}\right)$ *est pareil à* $\left(\times -\frac{3}{2}\right)$

Exemple 5 Résoudre l'équation $5x - 4 = 2x - 1$.

► *Solution*:

$$5x - 4 = 2x - 1$$

$$5x + (-2x) - 4 = 2x + (-2x) - 1$$

$$3x - 4 = -1$$

$$3x - 4 + 4 = -1 + 4$$

$$3x = 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

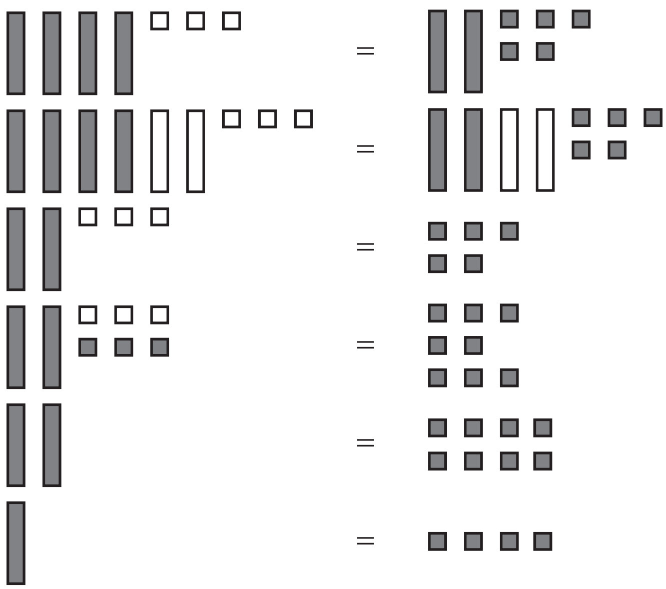
Vérifier : $5(1) - 4 = 2(1) - 1 \rightarrow 1 = 1$ ce qui est vrai.

La solution de $5x - 4 = 2x - 1$ est donc $x = 1$.

L'utilisation des tuiles algébriques pour résoudre les équations

Exemple 6 Résoudre l'équation $4x - 3 = 2x + 5$ à l'aide de tuiles algébriques.

► *Solution*:



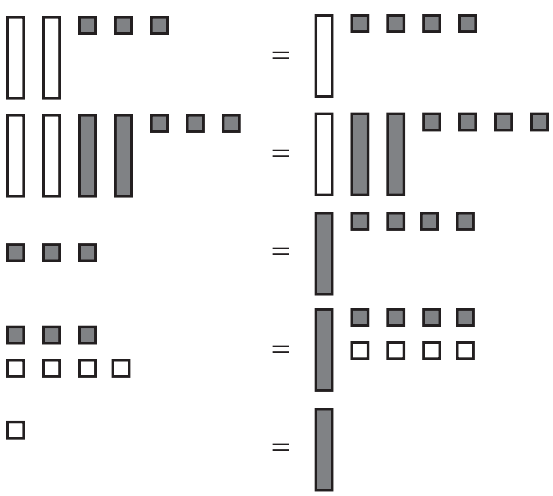
Ce qui donne $x = 4$.

Vérifier : $4(4) - 3 = 2(4) + 5 \rightarrow 13 = 13$ ce qui est vrai.

La solution de $4x - 3 = 2x + 5$ est donc $x = 4$.

Exemple 7 Résoudre l'équation $-2x + 3 = -x + 4$ à l'aide de tuiles algébriques.

► *Solution*:



Ce qui donne $x = -1$.

Vérifier : $-2(-1) + 3 = -(-1) + 4 \rightarrow 5 = 5$ ce qui est vrai.

La solution de $-2x + 3 = -x + 4$ est donc $x = -1$.

Les situations d'application des équations linéaires

L'algèbre sert à résoudre un grand nombre de problèmes pratiques. Pour cela, il faut traduire une phrase en une équation mathématique. Certaines phrases clés souvent rencontrées dans les problèmes écrits sont énumérées ci-dessous.

Addition

La somme d'un nombre et trois	$x + 3$
Cinq de plus qu'un nombre	$x + 5$
Dix ajouté à un nombre	$x + 10$
Un nombre augmenté de quatre	$x + 4$

Soustraction

Quatre de moins qu'un nombre	$x - 4$
Hiut moins un nombre	$8 - x$
Un nombre diminué de cinq	$x - 5$

Multiplication

Sept fois un nombre	$7x$
Douze pourcent d'un nombre	$0.12x$
Le double d'un nombre	$2x$
Le produit d'un nombre par sept	$7x$

Division

La moitié d'un nombre	$\frac{x}{2}$
Le quotient d'un nombre par quatre	$\frac{x}{4}$
Le quotient de deux par un nombre	$\frac{2}{x}$

Exemple 8 La somme de 13 et de trois nombres entiers relatifs pairs qui se suivent est 43. Trouver les trois nombres entiers relatifs.

► *Solution*: Mettons que x est le plus petit nombre recherché. Le deuxième est donc $x+2$, et $x+4$ est le troisième.

$$\begin{aligned} x+(x+2)+(x+4)+13 &= 43 \\ 3x+19 &= 43 \\ 3x+19-(19) &= 43-(19) \\ 3x &= 24 \\ (3x)\left(\frac{1}{3}\right) &= (24)\left(\frac{1}{3}\right) \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Les trois nombres entiers relatifs sont : 8, 10 et 12.

Exemple 9 Un homme a deux ans de plus que sa femme. L'âge de leur fils est la moitié de celui de sa mère. Si la somme de leurs trois âges est 97, quel est l'âge du fils?

► *Solution*: Mettons que x est l'âge de la femme. L'âge de l'homme est donc $x+2$, et l'âge de leur fils est $\frac{1}{2}x$.

$$\begin{aligned} x+(x+2)+\frac{1}{2}x &= 97 \\ \frac{5}{2}x+2 &= 97 \\ \frac{5}{2}x+2-(2) &= 97-(2) \\ \frac{5}{2}x &= 95 \\ \left(\frac{5}{2}x\right)\left(\frac{2}{5}\right) &= (95)\left(\frac{2}{5}\right) \\ x &= 38 \end{aligned}$$

L'âge du fils est la moitié de celui de sa mère, donc il a 19 ans.

Exemple 10 Une planche de 70 cm de long est coupée en deux. Un morceau de planche est 8 cm plus court que trois fois la longueur de l'autre morceau de planche. Quelles sont les longueurs de chaque morceau de planche ?

► *Solution*: Mettons que x est la longueur du plus court morceau de planche. La longueur de l'autre morceau de planche est donc $3x-8$.

$$\begin{aligned} x+3x-8 &= 70 \\ 4x-8 &= 70 \\ 4x-8+(8) &= 70+(8) \\ 4x &= 78 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{78}{4} \\ x &= 19\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le morceau de planche le plus court a une longueur de $19\frac{1}{2}$ cm, et l'autre morceau de planche a une longueur de $50\frac{1}{2}$ cm.

6.1 Exercices

1. Indiquer si la valeur de x est une solution de l'équation.

a) $3x + 5 = 14$; $x = 3$ o / n

b) $4x + 4 = 8$; $x = 2$ o / n

c) $-2x + 3 = 1$; $x = -1$ o / n

d) $-3x + 2 = -10$; $x = 4$ o / n

e) $3x + 5 = x + 13$; $x = 4$ o / n

f) $10x + 15 - 5x = 15$; $x = 0$ o / n

g) $6x - 4 = 8x + 8$; $x = 6$ o / n

h) $8x + 3 = 15x - 11$; $x = 2$ o / n

i) $-\frac{2}{3}x + 1 = 7$; $x = 12$ o / n

j) $\frac{3}{4}x - 5 = -17$; $x = -16$ o / n

2. Déterminer la solution de chaque équation.

a) $x + 3 = 7$

b) $x - 3 = 7$

c) $x + 3 = -7$

d) $x - 3 = -7$

e) $-x + 3 = 7$

f) $-x - 3 = 7$

g) $3x + 2 = 2x - 3$

h) $-3x + 2 = -2x - 3$

i) $3x - 2 = 2x - 3$

j) $-3x - 2 = -2x - 3$

3. Déterminer la solution de chaque équation.

a) $\frac{2}{3}x = 12$

b) $\frac{2}{3}x = -12$

c) $-\frac{2}{3}x = 12$

d) $-\frac{2}{3}x = -12$

e) $\frac{4}{5}x + 3 = 11$

f) $\frac{4}{5}x - 3 = 9$

g) $-\frac{4}{5}x + 5 = -7$

h) $-\frac{4}{5}x - 7 = -3$

i) $\frac{3}{4}x - 6 + 12 = 0$

j) $-\frac{3}{4}x - 6 + 12 = 0$

4. Déterminer la solution de chaque équation.

a) $\frac{x}{6} = 2$

b) $\frac{6}{x} = 2$

c) $\frac{x}{6} = -2$

d) $\frac{6}{x} = -2$

e) $\frac{x}{10} = 5$

f) $\frac{10}{x} = 5$

g) $\frac{4x}{5} = 8$

h) $\frac{4}{5x} = 8$

i) $\frac{2x}{3} = -6$

j) $\frac{2}{3x} = -6$

5. Déterminer la solution de chaque équation.

a) $4x + 5 = x + 8$

b) $6x - 5 = 8x + 7$

c) $-3x + 4 = x - 8$

d) $5x - 3 - 2x = -12$

e) $7y - 3y + 20 = 0$

f) $8y + 4 = 15y - 10$

g) $-4y + 5 - 2y = -13$

h) $-3y - 7 - y = 13$

i) $3z - 4 - 7 - z = -3$

j) $-4z + 5 - z = 5$

k) $3x + 11 - 2x = 4 + 6x + 2$

l) $-4x + 8 = 5x + 2 + 3x$

m) $4x - 7 + 3x = -x - 13 + 2x$

n) $7 + 8x - 5 = 5x + 9 + 4x$

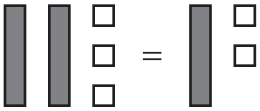
o) $6x + 2 = x - 5 + x - 7 + 2x$

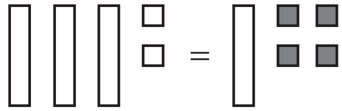
p) $5x + 9 + 3x - x + 4 = 4x - 5$

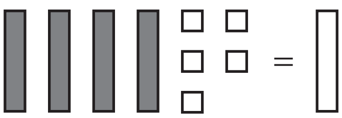
q) $17 - 3x + 2 = x - 15 + 6x$

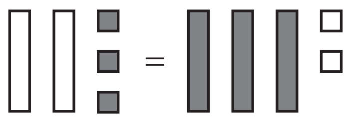
r) $13 - 2x + 3 = 2x - 21 + 3x$

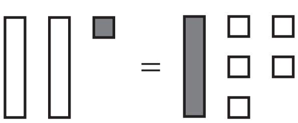
6. Résoudre l'équation modélisée en tuiles algébriques. Indiquer la solution algébrique.

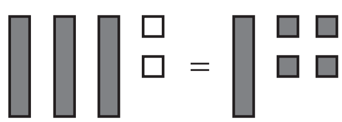
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

7. Déterminer l'équation équivalente.

a) $7x + 5 = 8x - 4$ *i)* $15x = -9$ *ii)* $x = -9$ *iii)* $7x + 9 = 8x$ *iv)* $9 = 15x$

b) $6x - 7 = 5x - 12$ *i)* $11x = 19$ *ii)* $11x - 7 = -12$ *iii)* $x = -19$ *iv)* $x - 7 = -12$

c) $12x - 7 = 8x + 13$ *i)* $4x - 7 = 13$ *ii)* $x = 20$ *iii)* $20x = 20$ *iv)* $4x = 6$

d) $7x + 6 = 12x - 9$ *i)* $5x = -15$ *ii)* $7x - 3 = 12x$ *iii)* $-3 = 5x$ *iv)* $7x + 15 = 12x$

8. Résoudre pour la variable b.

a) $a = bc$

b) $a = b + c$

c) $a = b - c$

d) $a = c - b$

e) $a = \frac{b}{c}$

f) $a = \frac{c}{b}$

g) $a = dc + b$

h) $a = \frac{b + c}{2}$

9. Traduire chaque phrase en équation mathématique.

a) La somme d'un nombre et de trois est douze.

b) Si le double d'un nombre est réduit de cinq, le résultat est quinze.

c) Le produit d'un nombre et de cinq est deux fois le nombre plus huit.

d) Le quotient d'un nombre par trois ajouté au double de ce nombre est dix.

e) Le quotient d'un nombre par cinq est sept.

f) La somme d'un nombre et de trois fois ce nombre est douze.

10. Un bâton de 36 cm est cassé en deux morceaux. L'un des morceaux est trois fois plus long que l'autre. Quelle est la longueur du morceau le plus court?

11. Le deuxième angle d'un triangle est quatre fois plus grand que le premier angle. Le troisième angle mesure 30° de plus que le premier angle. Combien mesure chaque angle?

12. La somme des numéros des deux pages ouvertes d'un livre est 111. Déterminer les numéros des pages.

13. Le double d'un nombre plus 36 est égal à cinq fois le nombre original. Quel est le nombre original?

14. À Victoria en C.-B., les taxis facturent 3 $ plus 60 ¢ par kilomètre. Combien de kilomètres est-il possible de parcourir avec 19,20 $?

15. Le périmètre d'un rectangle est 28 cm. La longueur est 2 cm plus petite que trois fois la largeur. Déterminer la longueur et la largeur.

16. Mel a acheté un appareil photo à 84 $, toutes taxes comprises. Les taxes sont de 12 %. Quel est le prix de l'appareil photo avant l'ajout des taxes?

17. Trois nombres, entiers relatifs et consécutifs, sont tels que la somme du premier nombre et de deux fois le deuxième nombre, à laquelle s'ajoute le troisième nombre réduit de cinq, est 27. Quels sont les nombres entiers relatifs?